**Симплекс-метод**.

x2≥3

3x1+1.875x2≥27

x1+2.9x2≥25.5

В 1-м неравенстве смысла (≥) вводим базисную переменную x3 со знаком минус. В 2-м неравенстве смысла (≥) вводим базисную переменную x4 со знаком минус. В 3-м неравенстве смысла (≥) вводим базисную переменную x5 со знаком минус.

x2-x3 = 3

3x1+1.875x2-x4 = 27

x1+2.9x2-x5 = 25.5

Введем **искусственные переменные x**: в 1-м равенстве вводим переменную x6; в 2-м равенстве вводим переменную x7; в 3-м равенстве вводим переменную x8;

x2-x3+x6 = 3

3x1+1.875x2-x4+x7 = 27

x1+2.9x2-x5+x8 = 25.5

Для постановки задачи на минимум целевую функцию запишем так:

F(X) = 100x1+360x2+Mx6+Mx7+Mx8 → min

За использование искусственных переменных, вводимых в целевую функцию, накладывается так называемый штраф величиной М, очень большое положительное число, которое обычно не задается.

Из уравнений выражаем искусственные переменные:

x6 = 3-x2+x3

x7 = 27-3x1-1.875x2+x4

x8 = 25.5-x1-2.9x2+x5

которые подставим в целевую функцию:

F(X) = 100x1 + 360x2 + M(3-x2+x3) + M(27-3x1-1.875x2+x4) + M(25.5-x1-2.9x2+x5) → min

или

F(X) = (100-4M)x1+(360-5.775M)x2+(M)x3+(M)x4+(M)x5+(55.5M) → min

Матрица коэффициентов A = a(ij) этой системы уравнений имеет вид:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 1.875 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 2.9 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 |

X0 = (0,0,0,0,0,3,27,25.5)

**Базисное решение** называется допустимым, если оно неотрицательно.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 |
| x6 | 3 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| x7 | 27 | 3 | 1.875 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| x8 | 25.5 | 1 | 2.9 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 |
| F(X0) | 55.5 | -100+4M | -360 | -M | -M | -M | 0 | 0 | 0 |

Переходим к основному алгоритму симплекс-метода.

**Итерация №0**.

**1. Проверка критерия оптимальности**.

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся положительные коэффициенты.

**2. Определение новой базисной переменной**.

В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x2, так как это наибольший коэффициент.

**3. Определение новой свободной переменной**.

Вычислим значения Di по строкам как частное от деления: bi / ai2

и из них выберем наименьшее:

min (3 : 1 , 27 : 1.875 , 25.5 : 2.9 ) = 3

Следовательно, 1-ая строка является ведущей.

Разрешающий элемент равен (1) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | min |
| x6 | 3 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 3 |
| x7 | 27 | 3 | 1.875 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 14.4 |
| x8 | 25.5 | 1 | 2.9 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 8.79 |
| F(X1) | 55.5 | -100+4M | -360 | -M | -M | -M | 0 | 0 | 0 |  |

**4. Пересчет симплекс-таблицы**.

Представим расчет каждого элемента в виде таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 |
| 3 : 1 | 0 : 1 | 1 : 1 | -1 : 1 | 0 : 1 | 0 : 1 | 1 : 1 | 0 : 1 | 0 : 1 |
| 27 | 3 | 1.875 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 25.5 | 1 | 2.9 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 |
| (0)-(3∙0):1 | (-100+4M)-(0∙0):1 | 0 | (-M)-(-1∙0):1 | (-M)-(0∙0):1 | (-M)-(0∙0):1 | (0)-(1∙0):1 | (0)-(0∙0):1 | (0)-(0∙0):1 |

Получаем новую симплекс-таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 |
| x2 | 3 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| x7 | 21.375 | 3 | 0 | 1.875 | -1 | 0 | -1.875 | 1 | 0 |
| x8 | 16.8 | 1 | 0 | 2.9 | 0 | -1 | -2.9 | 0 | 1 |
| F(X1) | 1080 | -100+4M | 0 | -360 | -M | -M | 360 | 0 | 0 |

**Итерация №1**.

Вычислим значения Di по строкам как частное от деления: bi / ai3

и из них выберем наименьшее:

min (- , 21.375 : 1.875 , 16.8 : 2.9 ) = 5.793

Следовательно, 3-ая строка является ведущей.

Разрешающий элемент равен (2.9) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | min |
| x2 | 3 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | - |
| x7 | 21.375 | 3 | 0 | 1.875 | -1 | 0 | -1.875 | 1 | 0 | 11.4 |
| x8 | 16.8 | 1 | 0 | 2.9 | 0 | -1 | -2.9 | 0 | 1 | 5.79 |
| F(X2) | 1080 | -100+4M | 0 | -360 | -M | -M | 360 | 0 | 0 |  |

**4. Пересчет симплекс-таблицы**.

Представим расчет каждого элемента в виде таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 |
| 3 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 21.375 | 3 | 0 | 1.875 | -1 | 0 | -1.875 | 1 | 0 |
| 16.8 | 1 | 0 | 2.9 | 0 | -1 | -2.9 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Получаем новую симплекс-таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 |
| x2 | 8.79 | 0.34 | 1 | 0 | 0 | -0.34 | 0 | 0 | 0.34 |
| x7 | 10.51 | 2.35 | 0 | 0 | -1 | 0.65 | 0 | 1 | -0.65 |
| x3 | 5.79 | 0.34 | 0 | 1 | 0 | -0.34 | -1 | 0 | 0.34 |
| F(X2) | 3165.517 | 24.138 | 0 | 0 | -M | -124.138 | -M | 0 | 124.138 |

**Итерация №2**.

**Определение новой свободной переменной**.

Вычислим значения Di по строкам как частное от деления: bi / ai1

и из них выберем наименьшее:

min (8.793 : 0.345 , 10.513 : 2.353 , 5.793 : 0.345 ) = 4.467

Следовательно, 2-ая строка является ведущей.

Разрешающий элемент равен (2.353) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | min |
| x2 | 8.79 | 0.34 | 1 | 0 | 0 | -0.34 | 0 | 0 | 0.34 | 25.5 |
| x7 | 10.51 | 2.35 | 0 | 0 | -1 | 0.65 | 0 | 1 | -0.65 | 4.47 |
| x3 | 5.79 | 0.34 | 0 | 1 | 0 | -0.34 | -1 | 0 | 0.34 | 16.8 |
| F(X3) | 3165.517 | 24.138 | 0 | 0 | -M | -124.138 | -M | 0 | 124.138 |  |

Представим расчет каждого элемента в виде таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 |
| 8.793 | 0.345 | 1 | 0 | 0 | -0.345 | 0 | 0 | 0.345 |
| 10.513 | 2.353 | 0 | 0 | -1 | 0.647 | 0 | 1 | -0.647 |
| 5.793 | 0.345 | 0 | 1 | 0 | -0.345 | -1 | 0 | 0.345 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Получаем новую симплекс-таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 |
| x2 | 7.25 | 0 | 1 | 0 | 0.15 | -0.44 | 0 | -0.15 | 0.44 |
| x1 | 4.47 | 1 | 0 | 0 | -0.42 | 0.27 | 0 | 0.42 | -0.27 |
| x3 | 4.25 | 0 | 0 | 1 | 0.15 | -0.44 | -1 | -0.15 | 0.44 |
| F(X3) | 3057.692 | 0 | 0 | 0 | 10.256 | -130.769 | -M | -10.256 | 130.769 |

**3. Определение новой свободной переменной**.

Вычислим значения Di по строкам как частное от деления: bi / ai4

и из них выберем наименьшее:

min (7.253 : 0.147 , - , 4.253 : 0.147 ) = 29.025

Следовательно, 3-ая строка является ведущей.

Разрешающий элемент равен (0.147) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | min |
| x2 | 7.25 | 0 | 1 | 0 | 0.15 | -0.44 | 0 | -0.15 | 0.44 | 49.5 |
| x1 | 4.47 | 1 | 0 | 0 | -0.42 | 0.27 | 0 | 0.42 | -0.27 | - |
| x3 | 4.25 | 0 | 0 | 1 | 0.15 | -0.44 | -1 | -0.15 | 0.44 | 29.025 |
| F(X4) | 3057.692 | 0 | 0 | 0 | 10.256 | -130.769 | -M | -10.256 | 130.769 |  |

**4. Пересчет симплекс-таблицы**.

Таким образом, в новом плане 4 заполнены строка x4 и столбец x4. Все остальные элементы нового плана 4, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника.

Представим расчет каждого элемента в виде таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 |
| 7.253 | 0 | 1 | 0 | 0.147 | -0.44 | 0 | -0.147 | 0.44 |
| 4.467 | 1 | 0 | 0 | -0.425 | 0.275 | 0 | 0.425 | -0.275 |
| 4.253 | 0 | 0 | 1 | 0.147 | -0.44 | -1 | -0.147 | 0.44 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Получаем новую симплекс-таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 |
| x2 | 3 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| x1 | 16.8 | 1 | 0 | 2.9 | 0 | -1 | -2.9 | 0 | 1 |
| x4 | 29.025 | 0 | 0 | 6.825 | 1 | -3 | -6.825 | -1 | 3 |
| F(X4) | 2760 | 0 | 0 | -70 | 0 | -100 | 70-M | -1M | 100-1M |

**1. Проверка критерия оптимальности**.

Среди значений индексной строки нет положительных. Поэтому эта таблица определяет оптимальный план задачи.

Окончательный вариант симплекс-таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 |
| x2 | 3 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| x1 | 16.8 | 1 | 0 | 2.9 | 0 | -1 | -2.9 | 0 | 1 |
| x4 | 29.025 | 0 | 0 | 6.825 | 1 | -3 | -6.825 | -1 | 3 |
| F(X5) | 2760 | 0 | 0 | -70 | 0 | -100 | 70-M | -1M | 100-1M |

Так как в оптимальном решении отсутствуют искусственные переменные (они равны нулю), то данное решение является допустимым.

Оптимальный план можно записать так:

x1 = 16.8, x2 = 3

F(X) = 100∙16.8 + 360∙3 = 2760